Τοπολογία 1/3/2018

Παρατήρηση: Αν (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n), τότε $k_n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη (με επαγωγή)

$k_1 \geq 1$ (αφού $k_1 \in \mathbb{N}$)

Υποθέτοντας ότι $k_n \geq n$

$k_{n+1} > k_n \geq n$ έχουμε $k_{n+1} \geq n$

Άρα $k_{n+1} \geq n+1$, διότι δεν υπάρχει φυσικός ανάμεσα από το n και το $n+1$.

Ορισμός: Έστω (X, ρ) μ.χ.
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X και $x_0 \in X$.
Λέμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$.
Θα συμβολίζουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ή $x_n \to x_0$

→ Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σε ένα μ.χ. (X, ρ) λέγεται συγκλίνουσα αν υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x_0$

Παρατήρηση: $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon) \iff$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ [n \geq n_0 \Rightarrow |\rho(x_n, x_0) - 0| < \varepsilon]$
$\iff \rho(x_n, x_0) \to 0$

Συμβολίζουμε $B_\rho(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \iff$
$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ x_n \in B_\rho(x_0, \varepsilon)$

Πρόταση: Έστω (X, ρ) μ.χ.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο X και $x, y \in X$
Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y$, τότε $x = y$.

απόδειξη
Με επαγωγή σε άτοπο
Υποθέτουμε ότι $x \neq y$
Τότε $\rho(x,y) > 0$. Θέτουμε $\epsilon = \frac{\rho(x,y)}{2}$

Εφόσον $x_n \to x$ θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, ώστε για $n \geq n_1$: $\rho(x_n, x) < \epsilon$
Εφόσον $x_n \to y$ θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, >> $n \geq n_2$: $\rho(x_n, y) < \epsilon$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε
$$\rho(x,y) \leq \rho(x, x_{n_0}) + \rho(x_0, y) = \rho(x_{n_0}, x) + \rho(x_{n_0}, y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \rho(x,y)$$
Άρα έχουμε $\rho(x,y) < \rho(x,y)$ Άτοπο
Επομένως, $x = y$.

Παρατήρηση: Το γεγονός της μοναδικότητας του ορίου που αποδείξαμε μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\lim x_n$ για να συμβολίζουμε το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας.

Παρατήρηση: Αν (X, ρ) μ.χ., (x_n) ακολ. στον X, $x_0 \in X$
$x_n \to x_0$ και (x_{k_n}) υπακολ. της (x_n) τότε: $x_{k_n} \to x_0$

απόδειξη:
Έστω $\epsilon > 0$ Εφόσον $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \epsilon$
Για κάθε $n \geq n_0$: $k_n \geq n \geq n_0$ άρα $\rho(x_{k_n}, x_0) < \epsilon$
$x_{k_n} \to x_0$

Παράδειγμα:

Έστω (X, ρ) ο διακριτός μετρικός χώρος $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο X ώστε $x_n \to x_0$ όπου $x_0 \in X$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\epsilon = 1$.

Λύση

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_0) < 1$

Άρα $\forall n \geq n_0$ $\rho(x_n, x_0) = 0$, δηλ $x_n = x_0$

Έτσι $x_n = x_0$ $\forall n \geq n_0$, δηλ η ακολουθία (x_n) είναι τελικά σταθερή (ίση με x_0)

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΙΟ ΧΩΡΟ $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$

Αν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$, έτσι σε κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^k$ αντιστοιχούν k ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\vec{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k)$$
$$\vec{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^k)$$

$$\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$$

Πρόταση:

Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$: ΤΑΕΙ:

$\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$, $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^k)$

1) $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$

2) Για κάθε $i = 1, \ldots, k$ ~~τσχε~~ ισχύει: $x_n^i \to x_0^i$

απόδειξη

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$ και $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ δ.ξ.ο. $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$

Έστω $\epsilon > 0$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < \epsilon$.

Όμως, $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2 \right)^{1/2} = \rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0)$

Έτσι, για $n \geq n_0$ $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| < \epsilon$

Άρα: $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Έστω ότι $\forall i = 1, \dots, k$: $x_n^i \to x_0^i$

Έστω $\epsilon > 0$

Για κάθε $i = 1, \dots, k$, αφού $x_n^i \to x_0^i$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$

ώστε $\forall n \geq n_i$: $|x_n^i - x_0^i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}}$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$

Για $n \geq n_0$: $\rho(\vec{x}_n, \vec{x}_0) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{k}} \right)^2 \right)^{1/2}$

$= \left(k \cdot \frac{\epsilon^2}{k} \right)^{1/2} = \epsilon$

Επομένως, $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$

Θεώρημα: (Bolzano- Weierstrass στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$)
Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. [Μια ακολ. $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^k$ λέγεται φραγμένη αν $\exists M>0$ $\|\vec{x}_n\|_2 \leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$]
απόδειξη
Για $k=2$ Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2)$, $n\in\mathbb{N}$
Εφόσον $|x_n^1| \leq \|\vec{x}_n\|_2$ προκύπτει ότι η (x_n^1) είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(x^1_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$

Η $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, άρα και η $(x^2_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι φραγμένη (ως υπακολ. της)
Απο θεώρημα Bolzano Weierstrass στους πραγματικούς υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Έστω $(x^2_{k_{\ell_n}})_{n\in\mathbb{N}}$

Τότε η $(x^1_{k_{\ell_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι συγκλίνουσα ως υπακολουθία

της συγκλίνουσας $(x^1_{k_n})$

Εφόσον οι $(x^1_{k_{\ell_n}})$ $(x^2_{k_{\ell_n}})$ είναι συγκλίνουσες, τότε

η $(\vec{x}_{k_{\ell_n}})$ είναι συγκλίνουσα.

Γενική περίπτωση: Θα υιοθετήσουμε έναν διαφορετικό συμβολισμό για τις υπακολουθίες
Αν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολ. σε ένα σύνολο Y και $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της. Θέτοντας $M=\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ θα συμβολίζουμε $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $(y_n)_{n\in M}$

Εστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμενη ακολουθια στον $\mathbb{R}^k$

$\vec{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$

Για καθε $i=1,\dots,k$: $|x_n^i| \le \|\vec{x}_n\|_2$ και αρα η $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι φραγμενη.

Αφου $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι φραγμενη ακολουθια στο $\mathbb{R}$ υπαρχει $M_1 \subset \mathbb{N}$ απειρο ωστε $(x_n^1)_{n\in M_1}$ συγκλινουσα.

Αφου η $(x_n^2)_{n\in M_1}$ ειναι φραγμενη υπάρχει $\underset{\text{άπειρο}}{M_2} \subseteq M_1 \subseteq \mathbb{N}$ ωστε η $(x_n^2)_{n\in M_2}$ να ειναι συγκλινουσα

Η $(x_n^3)_{n\in M_2}$ αρα $\exists M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_1 \subseteq \mathbb{N}$, με M_3 απειρο ωστε $(x_n^3)_{n\in M_3}$ συγκλινουσα

⋮ Μετά απο k-βηματα εχουμε κατασκευασει:

$M_k \subseteq M_{k-1} \subseteq \dots \subseteq M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_1 \subseteq \mathbb{N}$ απειρα ωστε

$(x_n^i)_{n\in M_i}$ να ειναι συγκλινουσα $\forall i=1,\dots,k$.

Θετοντας: $M_k = M$ $\forall i=1,\dots,k$ η $(x_n^i)_{i\in M}$ ειναι συγκλινουσα ως υπακολουθια της $(x_n^i)_{i\in M_i}$

Επομενως η $(x_n^k)_{n\in M}$ ειναι συγκλινουσα $\forall i=1,\dots,k$

Αρα η $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι συγκλινουσα.

Τελος αποδειξης B-W

Πρόταση:
Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι φραγμένη.
απόδειξη
Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στον $\mathbb{R}^k$ και $x_0 \in \mathbb{R}^k$
ώστε $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. Για $\epsilon = 1$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$: $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < 1$
δηλ. $\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_2 < 1$
Έτσι για $n \geq n_0$
$\|\vec{x}_n\|_2 \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_2 + \|\vec{x}_0\|_2 < 1 + \|\vec{x}_0\|_2$
Θέτοντας $M = \max\{\|\vec{x}_1\|_2, \dots, \|\vec{x}_{n_0-1}\|_2, 1 + \|\vec{x}_0\|_2\}$

έχουμε $\|\vec{x}_n\|_2 \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: Έστω (X, ρ), (Y, ρ) δύο μετρικοί χώροι και f $X \to Y$ μια συνάρτηση (πολλές φορές λέμε $f: (X,\rho) \to (Y,\rho)$), και $x_0 \in X$.
Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, αν $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in X$ αν $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

→ Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$ λέμε ότι η f είναι συνεχής.

Παρατήρηση: Το δ εξαρτάται από το ϵ και από το x_0.

Παραδείγματα:
α) $f (X, \rho) \to (Y, d)$ με $f(x) = y_0$ όπου $y_0 \in Y$
(σταθερή συνάρτηση)

είναι συνεχής!

β) Αν $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ με $f(x)=x$ (ταυτοτική συνάρτηση) είναι συνεχής, διότι για κάθε $\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$ έχουμε ....

γ) Έστω (X,ρ) μετρικός διακριτός χώρος και (Y,d) τυχαίος μ.χ. και $f: X\to Y$ συνεχής?

<u>απόδειξη γ</u>

Ανδο τυχαίο $x_0\in X$, τοτε η f συνεχής στο x_0.

Έστω $x_0\in X$

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta=1$

Για καθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ έχουμε $x=x_0$

άρα $d(f(x),f(x_0))=0<\varepsilon$.

δ) Καθε συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to(X,\rho)$ είναι συνεχής (όπου στο $\mathbb{N}$ θεωρούμε τη σχετική μετρική από τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$)

Έστω $n_0\in\mathbb{N}$ ΘΔΟ η f είναι συνεχής στο n_0

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta=1$

Για καθε $n\in\mathbb{N}$ με $|n-n_0|<\delta=1$ ισχύει $n=n_0$

άρα $\rho(f(n),f(n_0))=\rho(f(n_0),f(n))=0<\varepsilon$.

Παρατηρήσεις: Αν $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ και $x_0\in X$, η f είναι συνεχής στο x_0.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : f(B_\rho(x_0,\delta))\subset B_d(f(x_0),\varepsilon)$

<u>Ορισμός</u>:

Μια συνάρτηση $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ λέμε ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $C>0$ ώστε:

$d(f(x),f(y))\leq C\rho(x,y)\quad\forall x,y\in X$.

Πρόταση:
Αν η $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι συνεχής.

<u>απόδειξη</u> Εστω ότι ικανοποιεί Lipschitz με σταθερά c.
Εστω $\epsilon>0$ θέτουμε $\delta=\frac{\epsilon}{c}$ και έστω $x_0\in X$.

Για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ ισχύει

$$d(f(x),f(x_0))\leq C\rho(x,x_0)<C\cdot\delta=C\cdot\frac{\epsilon}{c}=\epsilon.$$

Επανάληψη ορισμού συνέχειας:
$f(X,\rho)\to(Y,d)$, $x_0\in X$

f συνεχής στο $x_0 \iff \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X$
$\left[\rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\epsilon\right]$

Παίρνοντας αρνήσεις
Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \iff \exists\epsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in X$
ώστε $\rho(x,x_0)<\delta$ και $d(f(x),f(x_0))\geq\epsilon$.

Θεώρημα: (ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ)
(ΑΡΧΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ)
Εστω $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ και $x_0\in X$.
Τ.Α.Ε.Ι : i) Η f είναι συνεχής στο x_0
ii) $\forall$ ακολ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X αν $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$
τότε $f(x_n)\xrightarrow{d}f(x_0)$

<u>απόδειξη</u>
(i)$\Rightarrow$(ii) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0
και (x_n) ακολ. στο X με $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$
Εστω $\epsilon>0$. Εφόσον f συνεχής στο x_0 $\exists\delta>0$

ώστε $\forall x$ αν $\rho(x, x_0) < \delta$, τότε $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
Επόμενον $x_n \to x_0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 : \rho(x_n, x_0) < \delta$
Άρα: από την προηγούμενη $d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$

Άρα $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.
Τότε $\exists \epsilon > 0$ ώστε $\forall \delta > 0$ $\exists x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ και $d(f(x_0), f(x)) \geq \epsilon$
Εφαρμόζοντας αυτό για $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in X$: $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ και $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$

Τότε $\rho(x_n, x_0) \to 0$ άρα $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$

Από (ii) υπόθεση: $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$, άρα
$d(f(x_n), f(x_0)) \to 0$
Άτοπο
διότι $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

$\dashv$